國立中山大學 109 學年度寒假轉學考招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系二年級】 **題號：724001**

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機 共 1 頁第 1 頁

以下第 1 題佔 10 分; 第 2–7 題, 各佔 15 分.

(1) 試證

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2021)^n}{n!} = 0.$$

(2) 找出下列函數圖形的水平漸近線, 垂直漸近線, 及 / 或傾斜漸近線. 並描出曲線 $y = f(x)$ 的圖形:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{2(x+1)}.$$

(3) 計算下列不定積分.

(a) $\int (2+3x)\sin 5x\, dx$.

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

(4) 驗算由下列曲線所圍成的圖形, 繞 $x-$軸旋轉所得的旋轉體的體積 $V = 18\pi$ 及其側面積 $S = \frac{62\pi}{3}$.

$$y = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 6.$$

(5) 用 Simpson 法 (拋物線法), 將積分區間分成 $n = 4$ 段, 驗算:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}.$$

註：$\sqrt{0.5} \approx 0.7071$, $\sqrt{0.75} \approx 0.8660$.

(6) 試以拉格朗日乘子法, 求解以下之極值問題:

$$\begin{array}{ll} \max / \min & z = x + y \\ \text{subject to} \\ \text{受限於} & x^2 + y^2 = 1. \end{array}$$

(7) 設 Ω 為以點 $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ 和 $C(0,0,1)$ 為角點的四面體 $OABC$ 的表面曲面. 選取 Ω 的單位法向量 $\mathbf{n}$, 使得它總是指向 $OABC$ 的外部. 計算曲面積分.

$$I = \iint_\Omega x\, dydz + y\, dzdx + (z+2)\, dxdy.$$